



TITLE:

# 波面の特異点の判定法とその応用 (部分多様体論と可積分系および幾 何解析とのつながり)

AUTHOR(S):

佐治, 健太郎

---

CITATION:

佐治, 健太郎. 波面の特異点の判定法とその応用(部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり). 数理解析研究所講究録 2008, 1577: 6-16

ISSUE DATE:

2008-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81367>

RIGHT:

## 波面の特異点の判定法とその応用

佐治健太郎 (Kentaro Saji)  
北海道大学大学院理学研究院  
(Hokkaido University)

ここでは、波面の特異点に関する判定法とその応用に関して述べる。波面とは特異点付きの超曲面で、特異点においても単位法線ベクトルが定義可能なもののことをいう。波面は一般に様々な特異点を持つが、そのなかで最もよくあらわれる A 型特異点の判定法を与える。

### 1. 序

まずは波面 (wave front) の基本的事項から述べる。

組  $(N, g)$  を  $n+1$  次元リーマン多様体とし、 $g$  によって  $TN$  と  $T^*N$  を同一視しておく。開領域  $U \subset \mathbb{R}^n$  の点  $p$  をとり、 $U$  から単位接バンドル

$$T_1N = \{x \in TN; \|x\| = 1\}$$

へのはめ込み芽

$$L: (U^n, p) \rightarrow (T_1N, L(p))$$

がルジャンドルはめ込みであるとは、 $T_1N$  の標準的な接触形式  $\alpha$  に対して

$$L^*\alpha = 0$$

が成り立つときと定義する。ルジャンドルはめ込み  $L(U^n, p) \rightarrow (T_1N, L(p))$  と射影  $\pi: T_1N \rightarrow N$  に対して集合

$$W(L) = \pi \circ L(U)$$

を  $L$  の波面集合という。ここで、 $L$  ははめ込みであるが、射影  $W(L)$  には特異点があってもよいことを注意しておく。波面集合の特異点について次のようなことが知られている。ここで、 $L(M^2, T_1N^3)$  で、ルジャンドルはめ込み  $M^2 \rightarrow T_1N^3$  全体の集合にホイットニー  $C^\infty$  位相を入れたものを表すとする。

**事実 1** (アーノルド・ザカリューキン [1]). 集合  $\mathcal{O} \subset L(M^2, T_1N^3)$  を

---

本稿は 2007 年 7 月に京都大学数理解析研究所において開催された研究集会「部分多様体論と可積分系とおよび幾何解析とのつながり」における講演の内容に加筆したものである。本稿の内容は梅原雅顕氏 (大阪大学) と山田光太郎氏 (九州大学) との共同研究の成果による。

$\mathcal{O} = \{L \in L(M^2, T_1 N^3); \text{ 任意の } p \in M^2 \text{ に対して } L \text{ at } p \text{ は } W(L) \text{ が}$   
 集合芽として非特異またはカスプ辺またはスワローテイルに  
 微分同相なものにルジャンドル同値}\}

と定義すると  $\mathcal{O}$  は  $L(M^2, T_1 N^3)$  の中で開かつ稠密である.

ここで, ルジャンドルはめ込み  $L_i : (U_i, p_i) \rightarrow (T_1 N_i, L_i(p_i))$  ( $i = 1, 2$ ) がルジャンドル同値であるとは微分同相写像  $\varphi : (U_1, P_1) \rightarrow (U_2, P_2)$  とファイバーを保つ接触微分同相写像  $\Phi : (T_1 N, L_1(p_1)) \rightarrow (T_1 N_2, L_2(P_2))$  が存在して

$$L_2 \circ \varphi = \Phi \circ L_1$$

が成り立つこととする. 事実 1 は, 与えられたルジャンドルはめ込み  $L$  を少し摂動することにより  $W(L)$  には 2 種類の特異点しかあらわれないように出来ると主張する.

最近の研究によって, 様々な特別な性質を持つ曲面が, あるルジャンドルはめ込みの波面集合としての構造を持つことが明らかになってきている [3, 4, 7, 8, 15]. このような対象の特異点を調べる際, 上記のような一般性定理はあまり有効ではなく, 具体的に与えられた写像が特定の特異点を持つためのなるべく簡単に計算できる判定法が重要である. カスプ辺とスワローテイルの判定法は [8] で与えられた. この判定法は様々な場面で波面の特異点を研究する際に応用された [3, 4, 6–12, 14, 15]. 高次元の波面の特異点に対して有用な判定法を作っておくことは意味深いと考える. ここでは, 高次元の波面の  $A$  型特異点に対する判定法を述べる. 我々は波面集合自体をある写像の像として扱いたいので, 上記の定義を少し言い換えることを考える. 以下は局所的な話なので  $(N, g) = (\mathbf{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  とする.

滑らかな写像芽  $f : (U^n, p) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, f(p))$  が波面であるとはリフト  $L_f : (U^n, p) \rightarrow (T_1 \mathbf{R}^{n+1}, L_f(p))$  が存在して  $L_f$  がルジャンドルはめ込みとなることをいう. 単位接バンドルを  $T_1 \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{n+1} \times S^n$  (単位球面) と同一視すると  $L_f$  は  $L_f = (f, \nu)$  のように書ける. このとき  $L_f$  がルジャンドルという条件は任意のベクトル場  $X \in \mathcal{X}(U)$  に対して

$$\langle df(X), \nu \rangle = 0$$

が成り立つことと同値である. このことから,  $\nu$  を単位法線ベクトルと呼ぶことにする.

波面の写像芽の特異点を調べるのが目的なので, 同じ写像芽とは定義域の座標変換と像域の座標変換で移りあうものと定義したい. そこで, 以下のような同値関係を導入する. なめらかな 2 つの写像芽  $f_i : (U_i, p_i) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, f_i(p_i))$  ( $i = 1, 2$ ) が  $A$ -同値であるとは微分同相写像芽  $\psi : (U_1, p_1) \rightarrow (U_2, p_2)$ ,  $\Psi : (\mathbf{R}^{n+1}, f_1(p_1)) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, f_2(p_2))$  が存在して  $\Psi \circ f_1 = f_2 \circ \psi$  が成り立つときをいう. この同値関係と上記のルジャンドルはめ込みの同値関係について次のようなことが知られている.

**事実 2** (ザカリューキン [16] see also [8]). 波面  $f_i : (U_i, p_i) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, f_i(p_i))$  ( $i = 1, 2$ ) は正則点が稠密であるとする. このとき  $L_{f_1}$  と  $L_{f_2}$  がルジャンドル同値である必要十分条件は  $f_1$  と  $f_2$  が  $A$ -同値であることである.

この事実により, 2つの同値関係にほぼ差がないことが解るので, 波面  $f$  が特定の特異点と  $A$ -同値になるための判定法を作ることを目的とする.

ここで, 波面にあらわれるいくつかの代表的な特異点の例を見ておく.

**例 3** (カスプ辺). 写像  $f : (u, v) \mapsto (u^2, u^3, v)$  の原点における写像芽 (に  $A$ -同値なもの) をカスプ辺という.

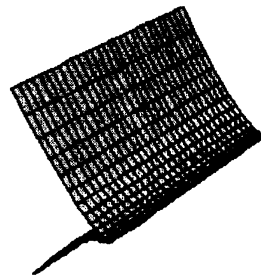


図 1. カスプ辺

**例 4** (スワローテイル). 写像  $f : (u, v) \mapsto (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$  の原点における写像芽をスワローテイルという.

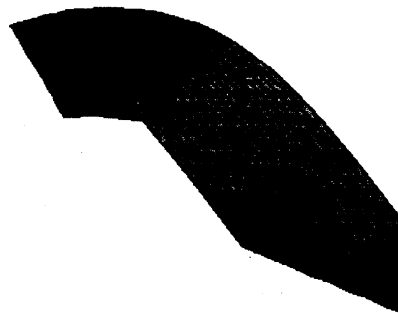


図 2. スワローテイル

例 5. 関数  $F^k(t, \mathbf{y}) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$F^k(t, \mathbf{y}) = t^{k+1} + \sum_{i=1}^k t^{k-i} y_i, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k, \dots, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

とおく. ただし,  $k \leq n+1$ .  $F^k$  の判別集合を

$$\mathcal{D}_{F^k} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n+1}; \exists t \in \mathbf{R} \text{ s.t. } F^k(t, \mathbf{y}) = \frac{\partial F^k}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = 0 \right\}$$

とかく. 写像芽  $f : (U^n, p) \rightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, f(p))$  の点  $P$  が  $A_k$ -型特異点であるとは  $f(U)$  at  $p$  が  $\mathcal{D}_{F^k}$  at  $0$  と (集合芽として) 一致するときをいう. パラメーター表示すると

$$\mathbf{x} \mapsto \left( kx_1 + \sum_{i=2}^{k-1} (i-1)x_i x_1^i, (k+1)x_1^k + \sum_{i=2}^{k-1} i x_i x_1^{i-1}, x_2, \dots, x_n \right)$$

となる. ただし  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . これは,  $A_k$  型の関数  $t^{k+1}$  の普遍開折  $F^k$  の判別集合として得られることからこの名前が付いている. 詳しくは [2, 5] を参照. これらは波面の特異点としてよくあらわれるものである.

とくに  $n=2, k=2$  のときカスプ辺で,  $n=2, k=3$  のときスワローテイルであることに注意しておく.

## 2. 判定法

波面の特異点の判定法を与えるために重要となる  $i$ -非退化性と  $i$ -非特異性を導入する.

写像  $f : (U^n; u_1, \dots, u_n) \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  を波面とし,  $\nu$  を単位法線ベクトルとする.  $f$  の特異点集合  $S(f) =: S_1$  を

$$S_1 = \{q \in U; \text{rank}(df)_q < n\}$$

と定義する. 点  $p$  が 1-特異であるとは  $p \in S_1$  となることと定義する. 一方波面の定義から,  $f$  の  $n$  個の偏導関数に加えてもう一つ単位法線ベクトルがあり, 合計  $n+1$  本のベクトルがあるので, 関数  $\lambda$  を

$$\lambda := \det(f_{u_1}, \dots, f_{u_n}, \nu), \quad \left( f_{u_1} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \right)$$

と定義する. このとき  $\lambda^{-1}(0) = S_1$  であるが,  $p$  が 1-非退化であるとは 1-特異でありかつ  $d\lambda(p) \neq 0$  であるときと定義する.

1-非退化な点  $p$  に対しては  $p$  の近傍で  $S_1$  が余次元 1 の部分多様体となるので,  $S_1$  上の 0 にならないベクトル場  $\eta$  が存在して  $(df)_q(\eta_q) = 0$  が成立する. この  $\eta$  を退化ベクトル場と呼ぶ. 退化ベクトル場は例えばフロント

$$f := (f_1, f_2, f_3, f_4) : U^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$$

の場合は

$$\det \begin{pmatrix} (f_1)_{u_1} & (f_1)_{u_2} \\ (f_2)_{u_1} & (f_3)_{u_2} \end{pmatrix} \neq 0$$

とすると,

$$\tilde{\eta} = \left( \det \begin{pmatrix} (f_1)_{z_2} & (f_1)_{z_3} \\ (f_2)_{z_2} & (f_3)_{z_3} \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} (f_1)_{z_1} & (f_1)_{z_3} \\ (f_2)_{z_1} & (f_3)_{z_3} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} (f_1)_{z_1} & (f_1)_{z_2} \\ (f_2)_{z_1} & (f_3)_{z_2} \end{pmatrix} \right).$$

のようにして  $U$  全体に拡張できる. このように  $U$  全体に拡張したものを拡張された退化ベクトル場と呼び,  $\tilde{\eta}$  であらわすことにする.

今,  $p$  は 1-非退化であったので  $S_1$  が部分多様体であることから,  $T_p S_1$  は意味を持つ. 同様に制限  $f_1 := f|_{S_1}$  も意味を持つ.

ここで先のカスプ辺とスワローテイルの例を見てみる. 両方とも 1-非退化であるが, カスプ辺のほうは  $f_1$  を考えるとこれは正則な曲線である. 一方スワローテイルのほうでは  $f_1$  は 3/2-カスプであり, 特異点を持っている (図 3). このことを参考に次のように帰納的に定義する.

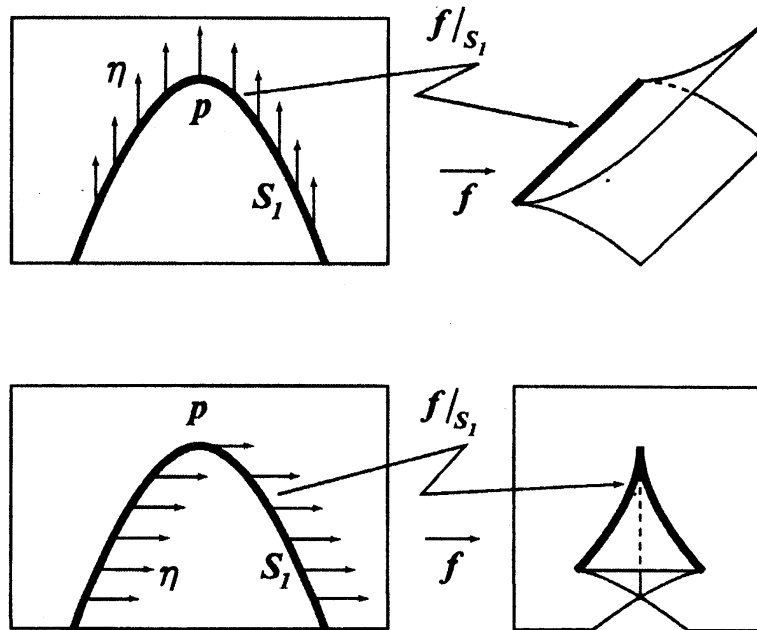


図 3. カスプ辺とスワローテイル

まず,  $S_2 := S(f_1)$  において,  $p$  が 2-特異であるとは 1-非退化かつ  $p \in S_2$  であるときと定義する. これは  $\tilde{\eta}_p \in T_p S_1$  と同値である. さらに  $p$  が 2-非退化であるとは, 2-特異かつ  $T_p S_1$  上で  $d(\lambda')_p \neq 0$  であるときと定義する. ただし,  $\lambda' = d\lambda(\tilde{\eta})$ . このとき, 同様に  $S_2$  は  $S_1$  内の余次元 1 の部分多様体である.

さらに  $S_j = S(f_{j-1})$  ( $S_0 = U$ ),  $f_j = f_{j-1}|_{S_j}$  とおき,  $p$  が  $j$ -特異であるとは  $(j-1)$ -非退化かつ  $p \in S_j$  であるときと定義する. また,  $p$  が  $j$ -非退化であるとは  $j$ -特異かつ  $T_p S_{j-1}$  上で  $(d\lambda^{(j-1)})_p \neq 0$  が成り立つときと定義する. ただし,  $\lambda^{(j-1)} = d\lambda^{(j-2)}(\tilde{\eta})$ . これは

$$T_p S_{j-1} \not\subset \ker(d\lambda^{(j-1)})_p$$

と同値である. この定義は特異性と非退化性が成り立つ限り,  $j = n$  まで続けることが可能である. ただし,  $S_n = \{p\}$  となるので,  $n$ -非退化のとき,  $(n+1)$ -特異ではないことが自動的に成り立つ.

この記号のもと, 判定法は次のように述べられる.

**定理 6** ([13]). 波面  $f: (U^n, p) \rightarrow (R^{n+1}, f(p))$  に対して,  $f$  at  $p$  が  $A_{k+1}$  型の特異点に  $A$  同値である必要十分条件は  $p$  が  $f$  の  $k$ -非退化であるが,  $(k+1)$ -特異でない特異点であることである.

この定理で  $n = 2, k = 2, 3$  のとき [8] の判定法が得られることを注意しておく. この定理は写像を何度も制限したものを考える必要があるが, 次の系を示すことができる.

**系 7.** 波面  $f: (U^n, p) \rightarrow (R^{n+1}, f(p))$  に対して,  $f$  at  $p$  が  $A_{k+1}$  型の特異点に  $A$  同値である必要十分条件は

- $d\lambda(p) \neq 0$ ,
- $\lambda(p) = \lambda'(p) = \dots = \lambda^{(k-1)}(p) = 0, \lambda^{(k)}(p) \neq 0$ ,
- 写像  $\Lambda := (\lambda, \lambda', \dots, \lambda^{(k-1)}): U \rightarrow R^k$  は  $p$  で非特異.

ただし,  $\lambda' (= \lambda^{(1)}) = \tilde{\eta}\lambda, \lambda^{(i)} = \tilde{\eta}\lambda^{(i-1)}$  であり,  $\tilde{\eta}$  は退化ベクトル場  $\eta$  を  $U$  上に拡張したものである.

この系は退化ベクトル場に関する微分のみを使っているので与えられた  $f$  の情報だけで直接的に計算できる点で有用であると思われる. 以下で, この判定法の応用例を見ていく.

**例 8.**

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^4 + x_1^2 x_2, 4x_1^3 + 2x_1 x_2, x_2, x_3): R^3 \rightarrow R^4$$

とする.

$$\nu = (1, -x_1, x_1^2, 0)/\sqrt{1 + x_1^2 + x_1^4}$$

とおけば,  $f$  が波面となることが解り, 退化方向ベクトル場は  $(1, 0, 0)$  で, 関数  $\lambda$  は

$$\lambda = -(12x_1^2 + 2x_2)(1 + x_1^2 + x_1^4)^{1/2}$$

である。系 7 の条件は  $\lambda$  を 0 でない関数倍しても変わらないので

$$\lambda = 6x_1^2 + x_2$$

としてよい。直接計算により  $d\lambda(0) \neq 0$  であり,  $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ ,  $\lambda''(0) \neq 0$  ( $' = \eta(\cdot) = \partial/\partial x_1$ ) であることが解る。さらに

$$\begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' \\ \lambda_{x_2} & \lambda'_{x_2} \\ \lambda_{x_3} & \lambda'_{x_3} \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので,  $f$  at 0 は  $A_3$  型特異点であると言える。これはスワローテイルと区間を直積したものである。

例 9.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1^5 + 2x_1x_3 + x_1^2x_2, 5x_1^4 + 3x_1^2x_3 + 2x_1x_2, x_2, x_3)$$

とする。

$$\nu = (1, -x_1, x_1^2, x_1^3) / \sqrt{1 + x_1^2 + x_1^4 + x_1^6}$$

とおけば  $f$  が波面となることが解り退化方向ベクトル場は  $(1, 0, 0)$  で, 関数  $\lambda$  は  $p$  で 0 にならない関数倍を同一視して

$$\lambda = 10x_1^3 + 3x_1x_3 + x_2$$

となることが解る。再び直接計算により,

$$d\lambda(0) \neq 0, \lambda(0) = \lambda'(0) = \lambda''(0) = 0, \lambda'''(0) \neq 0.$$

さらに

$$\begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & \lambda''' \\ \lambda_{x_2} & \lambda'_{x_2} & \lambda''_{x_2} \\ \lambda_{x_3} & \lambda'_{x_3} & \lambda''_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので,  $f$  at 0 は  $A_4$  型特異点であることが解る。これはスワローテイルと区間の直積をその特異値の部分に  $3/2$ -カスプになるようにつぶした特異点である。

例 10.  $R^4$  内の正則曲線  $\gamma: I \rightarrow R^4$  を考える。  $e, n_1, n_2, n_3, \kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0, \kappa_3$  でそれぞれ  $\gamma$  のフルネ粋, 曲率をあらわす。このとき, 一般化された線織面  $F$  を

$$F(t, u, v) = \gamma(t) + ue(t) + vn_1(t)$$

と定義する。これは  $\nu = n_3$  と定義すると, 単位法線ベクトルは定義できて, さらに  $\kappa_3 \neq 0$  ならば波面となることが解る。退化ベクトル場は  $\eta = (-1, 1, u\kappa_1)$  で, 関数



$\lambda$  は (0 でない関数倍を同一視して)  $v$  となる. よって  $S(F) = \{v = 0\}$  である. 計算により

$$\begin{aligned}\eta\lambda &= u\kappa_1 \\ \eta\eta\lambda &= -u\kappa'_1 + \kappa_1\end{aligned}$$

となるので,  $\kappa_3(t_0) \neq 0$  のとき,

- $u \neq 0$  のとき  $F$  at  $(t_0, u, 0)$  は  $A_2$  型特異点 (すなわちカスプ  $\times \mathbf{R}^2$ ).
- $F$  at  $(t_0, 0, 0)$  は  $A_3$  型特異点 (すなわちスワローテイル  $\times \mathbf{R}$ ).

がわかる. ここで,  $\kappa_3 = 0$  となる点では, 高次元のカスプ的交叉帽子特異点であると思われる. この特異点に関しては現在判定法を研究中である. 3次元空間内の曲面のカスプ的交叉帽子特異点については [3] を参照.

### 3. 他の特異点の判定法

これまでは  $\mathbf{R}^{n+1}$  内の  $A_k$  型 ( $k \leq n$ ) 特異点の判定法を述べた. 最近,  $\mathbf{R}^3$  内の曲面の特異点について, もうすこし退化した特異点に関する判定法を得たのでここでそれを紹介したい.

写像

$$(u, v) \mapsto (3u^4 \pm 2u^2v^2, u^3 \pm uv^2, v)$$

の原点における写像芽をくちびる (+ の場合) またはくちばし (- の場合) とそれぞれ呼ぶ. また, 写像

$$(u, v) \mapsto (5u^4 + 2vu, v, 4u^5 + u^2v - v^2)$$

の原点における写像芽を  $A_4$  分岐と呼ぶ. これらは次のように波面の 1 パラメータの分岐にあらわれる特異点である (図, 4, 5, 6).

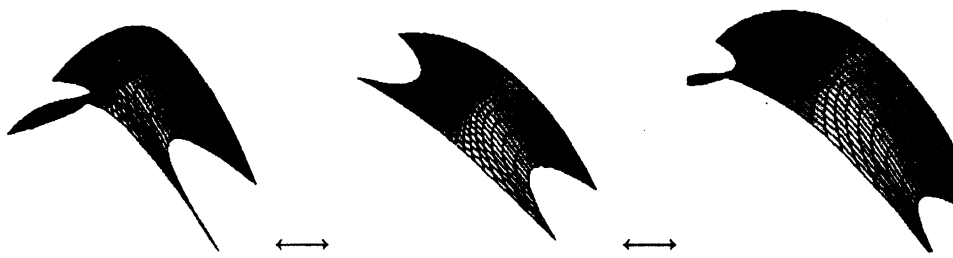


図 4. くちびる

波面の特異点が 1-非退化であれば退化ベクトル場は定義域全体に拡張できることを前に述べたが, 特異点において余階数  $df$  の余階数が 1 である場合も同様に退化ベクトル場は定義域全体に拡張できる. これを  $\eta$  と書くことにする.

これらの特異点の判定法は次のようになる.

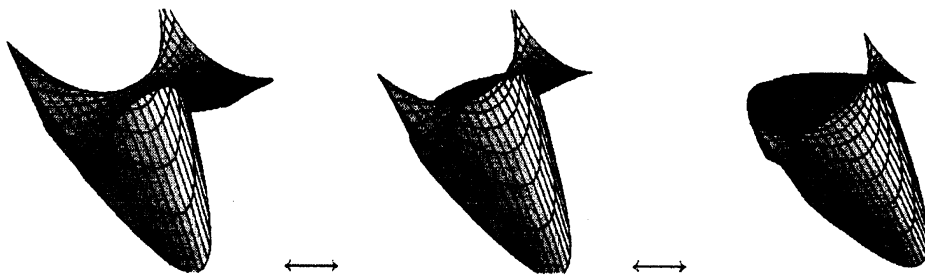
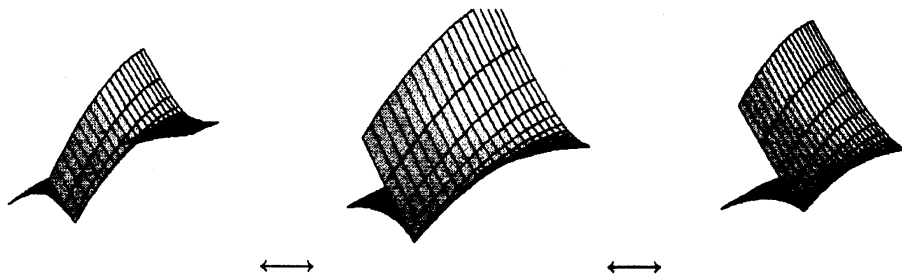


図 5. くちばし

図 6.  $A_4$  型分岐

**定理 11.** 波面  $f: U^2 \rightarrow R^3$  の特異点  $p$  に対して  $f$  at  $p$  が

- くちびるに  $A$ -同値であることの必要十分条件は  $\text{rank}(df)_p = 1$  かつ  $\lambda: U \rightarrow R$  は  $p$  で指数 0 または 2 のモース型臨界点を持つことである.
- くちばしに  $A$ -同値であることの必要十分条件は  $\text{rank}(df)_p = 1$  かつ,  $\lambda: U \rightarrow R$  は  $p$  で指数 1 のモース型臨界点を持ち,  $\lambda''(p) \neq 0$  をみたすことである.
- $A_4$  分岐に  $A$ -同値であることの必要十分条件は  $d\lambda(p) \neq 0$ ,  $\lambda(p) = \lambda'(p) = \lambda''(p) = 0$  かつ  $\lambda'''(p) \neq 0$  となることである.

ただし,  $\lambda' = \eta\lambda$ . この判定法は一般的な波面にはあられないものの, 波面の一般的分岐にはあられる特異点に関する判定法を与えているので, 特別な性質をもつ波面の特異点を研究する際に有用であると思われる.

**例 12** ( $H^3$  内のホロ球面的曲面 [11]).  $R_1^4$  で符号  $(-, +, +, +)$  をもつ内積  $\langle, \rangle$  によるローレンツ・ミンコフスキー空間をあらわすとする.  $R_1^4$  内の擬球面を

$$\begin{aligned} H^3(-1) &= \{x \in R_1^4; \langle x, x \rangle = -1\} \\ LC^* &= \{x \in R_1^4; \langle x, x \rangle = 0\} \\ S_1^3 &= \{x \in R_1^4; \langle x, x \rangle = 1\} \end{aligned}$$

と定義する. 曲線  $\gamma: I \rightarrow H_+^3(-1)$  ( $|\gamma'| = 1$ ) をとる. 曲線  $a_i: I \rightarrow S_1^3$  ( $i = 1, 2$ ) を  $\langle \gamma, a_1 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle = 0$  をなるようにとり,

$$a_3 = \gamma \wedge a_1 \wedge a_2$$

とおくと  $\{\gamma, a_1, a_2, a_3\}$  は  $\mathbf{R}_1^4$  の擬正規直交基底となる.

$$l = \gamma + a_2 \in LC^*$$

とおく. 曲面  $F = F_{(\gamma, a_1, a_2)}$  を

$$F_{(\gamma, a_1, a_2)}(s, t) = \gamma(t) + sa_1(t) + s^2l(t)/2$$

と定めるとこれはホロ円の 1 パラメーター族をあらわすことがわかる. ここで, 擬正規直交基底  $\{\gamma, a_1, a_2, a_3\}$  は次のフルネ・セレ型の方程式を満たす:

$$\begin{pmatrix} \gamma' \\ a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & 0 & c_4 & c_5 \\ c_2 & -c_4 & 0 & c_6 \\ c_3 & -c_5 & -c_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

関数  $c_1, \dots, c_6 \in C^\infty(I, \mathbf{R}^6)$  によって  $F$  はローレンツ運動を除いて一意に定まるので, ホロ円の 1 パラメーター族全体の空間を  $C^\infty(I, \mathbf{R}^6)$  と思うことが出来る. この中で, 特に  $c_1 - c_4 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$  を常に満たすものを考えるとこれは双曲的ガウス写像が  $l$  であり, 曲線  $\gamma$  にホロ円が常に接しているものとなるので, これを接ホロ円織面と呼ぶ.

本稿で述べた判定法を使ってこの曲面の特異点を次のように求めることができる. まず,  $c_6 \neq 0$  ならば  $F$  は波面となる. さらに,  $\lambda = s(c_5 + sc_6/2), \eta = (c_1, -1)$  がわかるので,  $S(F) = \{s = 0\} \cup \{c_5 + sc_6/2 = 0\}$  である. 特異点  $(0, t_0)$  において

- $F$  がカスプ辺に同値である必要十分条件は  $c_6(t_0) \neq 0, c_5(t_0) \neq 0$  かつ  $c_1(t_0) \neq 0$ .
- $F$  がスワローテイルに同値である必要十分条件は  $c_6(t_0) \neq 0, c_5(t_0) \neq 0, c_1(t_0) = 0$  かつ  $c_1'(t_0) \neq 0$ .
- $F$  がくちばしに同値である必要十分条件は  $c_6(t_0) \neq 0, c_5(t_0) = 0, c_5(t_0)' \neq 0, c_1(t_0) \neq 0$  かつ  $(c_1 - s')(t_0) \neq 0$ .
- $F$  がカスプ的交叉帽子に同値である必要十分条件は  $c_6(t_0) = 0, c_5(t_0) \neq 0, c_6'(t_0) \neq 0$  かつ  $c_1(t_0) \neq 0$ .

ただし  $s(t) = 2c_5(t)/c_6(t)$ . 特異点  $(-s(t_0), t_0)$  において

- $F$  がカスプ辺に同値である必要十分条件は  $c_6(t_0) \neq 0, c_5(t_0) \neq 0$  かつ  $(c_1 - s')(t_0) \neq 0$ .
- $F$  がスワローテイルに同値である必要十分条件は  $c_6(t_0) \neq 0, c_5(t_0) \neq 0, (c_1 - s')(t_0) = 0$  かつ  $(c_1 - s')'(t_0) \neq 0$ .

このように  $c$  の条件だけを使って書ける. これから, 接ホロ円織面にジェネリックにあらわれる特異点がカスプ辺, スワローテイル, くちばし, カスプ的交叉帽子で

あることが証明できる. この場合, 通常の波面にはジェネリックにあらわれなくちばしがあらわれる. また, カスプ的交叉帽子を持つ場合, その特異点を通るホロ円上には特異点を持ち得ない. さらに, くちびるがあらわれることは無いことがわかる.

### 参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*. Birkhäuser (1986).
- [2] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and singularities (second edition)*, Cambridge University press (1992)
- [3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, preprint, <http://arxiv.org/abs/math.DG/050366>, to appear in Math. Z.
- [4] G. Ishikawa and Y. Machida, *Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature*, International J. Math., **17** (2006), no. 3, 269–293.
- [5] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版 (1998).
- [6] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Circular surfaces*, Adv. geom. **7** (2007), 295–313.
- [7] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic 3-space*, preprint, <http://arxiv.org/abs/0708.0300>.
- [8] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), no. 2, 303–351.
- [9] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, preprint, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0605604>.
- [10] M. Noro, T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, *Confluence of swallowtail singularities of the hyperbolic Schwarz map defined by the hypergeometric differential equation*, preprint.
- [11] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space*, preprint, Hokkaido univ. preprint series **838**.
- [12] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada *The geometry of fronts*, preprint, <http://arxiv.org/abs/math/0503236>
- [13] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, in preparation.
- [14] T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, *Hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation*, preprint, <http://arxiv.org/abs/math.CA/0609196>.
- [15] M. Umehara and K. Yamada *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.
- [16] V. M. Zakalyukin, *Reconstructions of fronts and caustics depending one parameter and versality of mappings*. J. Sov. Math., **27** (1984), 2713–2735.